| NAME | NIA | GRADE |
|---|---|---|
| | | |

# Introduction to Network Science (2019-2020)

## *FINAL EXAM (TT01-TT13)*

**ESCRIBE TUS RESPUESTAS <u>CLARAMENTE</u> EN LOS ESPACIOS EN BLANCO.** Por favor escribe claramente, como si estuvieses intentando comunicar algo a otra persona que necesita entender lo que escribiste para poder evaluarlo adecuadamente. Si una respuesta requiere pasos intermedios, por favor marca claramente tu respuesta final con un rectángulo. Si contestas escribiendo texto, por favor subraya las palabras o frases clave de tu respuesta. Si es absolutamente necesario, puedes adjuntar una hoja extra a tu examen, indicando que la solución se encuentra en la hoja extra.

**Problema 1** *1 punto*

Recordando que la varianza del grado es $\sigma_k^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$, y que en una red libre de escala, $\langle k^2 \rangle = C\frac{k_{\max}^{3-\gamma} - k_{\min}^{3-\gamma}}{3-\gamma}$, donde C es una constante, $k_{\max}$ y $k_{\min}$ son el grado máximo y mínimo, y $\gamma$ el exponente de la ley de potencias.

1. Indica qué sucede con la varianza del grado en un grafo grande cuando $\gamma \in ]2, 3[$. ¿Puede considerarse ese grafo "libre de escala"? ¿Por qué, o por qué no?

2. Indica qué sucede con la varianza del grado en un grafo grande cuando $\gamma > 3$. ¿Puede considerarse ese grafo "libre de escala"? ¿Por qué, o por qué no?

**Problema 2** *1 punto*

Dadas las siguientes operaciones: $G =$ *createGraph()* que crea un grafo vacío, *nodes(G)* que retorna los nodos de un grafo, *outLinks(G, i)* que retorna los arcos salientes de un nodo $i$, *addNode(G, i)* que agrega un nodo con número $i$ al grafo, *addEdge(G, i, j)* que agrega un arco dirigido de $i$ a $j$ al grafo, *pickRandom(S)* que elije un elemento al azar del conjunto $S$. Describe una función que implemente el modelo de copia ("copy model") visto en clase para crear un grafo de $n$ nodos usando el parámetro $p$, de manera precisa con seudocódigo.

*runCopyModel(n,p):*

**Problema 3** *1 punto*

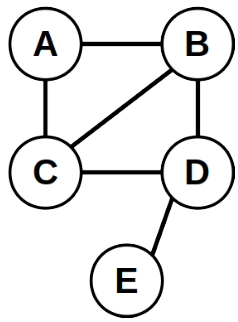
1. Esboza un grafo de $N$ nodos en el cual hay un nodo, que debes marcar con un asterisco (*), que tiene *betweenness* aproximadamente igual a $N$ y *closeness* aproximadamente $1/N$, para $N$ grande. Explica brevemente.

2. Esboza un grafo de $N$ nodos en el cual hay un nodo, que debes marcar con un asterisco (*), que tiene *betweenness* aproximadamente igual a $N$ y *closeness* aproximadamente $2/N^2$, para $N$ grande. Explica brevemente.

*No uses un $N$ en concreto, usa un $N$ general, por ejemplo usando puntos suspensivos (. . . ) para denotar múltiples nodos.*

**Problema 4** *2 puntos*

Considera el grafo de la derecha, que contiene un subgrafo con densidad $d(S) = 2|E(S, S)|/|S|$ igual a $5/2$. Dibuja el grafo de la construcción de Goldberg, y en ese grafo, dibuja un corte $s - t$ que cruce algunos de los arcos originales y demuestre que un subgrafo de densidad $5/2$ existe. Indica claramente (1) el costo de cada arco en la construcción, (2) el objetivo deseado de costo del corte como función de $|E|$, (3) el costo del corte encontrado, y (4) el sub-grafo que el método encuentra.




1. Dibuja la construcción de Goldberg con los costos de todos los arcos claramente indicados:

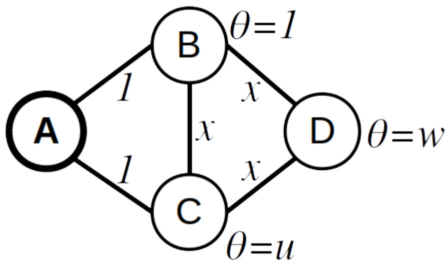
2. El costo de un corte como función de $|E|$ debería ser:

3. El costo del corte encontrado:

4. El sub-grafo de densidad $5/2$ contiene los nodos:

**Problema 5** *1 punto*

Considera el grafo de la derecha y el modelo de **Linear Threshold** ejecutado sobre él, comenzando del nodo semilla A. Los pesos de influencia están escritos junto a los arcos, y los umbrales $\theta$ junto a los nodos. Indica cuál es el rango de valores de $x$ para los cuales el nodo $C$ resulta infectado, pero el nodo $D$ no resulta infectado. Justifica brevemente tu respuesta.

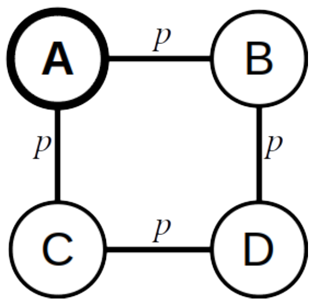



1. ____________ $\leq x <$ ____________
2. Justificación:

**Problema 6** *2 puntos*

Considera el grafo de la derecha y el modelo de **Independent Cascade** ejecutado sobre él, comenzando del nodo semilla A. La probabilidad de contagio de todos los arcos es $p$.

Indica cuál es la probabilidad al final del proceso.




1. Probabilidad de que sólo esté infectado el nodo A:
2. Probabilidad de que sólo estén infectados los nodos A, B:
3. Probabilidad de que sólo estén infectados los nodos A, B, C:
4. Probabilidad de que sólo estén infectados los nodos A, B, D:

**Problema 7** *2 puntos*

En un modelo epidémico que llamaremos **SIRS**, hay tres posibles estados para un nodo: *susceptible*, *infectado*, y *recuperado*. Sólo los nodos susceptibles pueden resultar infectados, sólo los nodos infectados pueden recuperarse, y sólo los nodos recuperados pueden volverse susceptibles de nuevo. Durante una unidad de tiempo, con probabilidad $\beta$ un nodo infectado puede infectar a uno de sus contactos, con probabilidad $\mu$ un nodo infectado puede recuperarse, y con probabilidad $\sigma$, un nodo recuperado puede volverse susceptible de nuevo.

Sea $s(t)$ la fracción de nodos susceptibles, $i(t)$ la fracción de nodos infectados, $r(t)$ la fracción de nodos recuperados, y $\langle k \rangle$ el grado promedio en el grafo. Escribe las ecuaciones, **simplificándolas apropiadamente**, para:

1. $\frac{di(t)}{dt} =$
2. $\frac{dr(t)}{dt} =$
3. $\frac{ds(t)}{dt} =$
4. ¿Es $\sigma > \mu$ suficiente para decir que los nodos recuperados tienden a cero en el largo plazo?