NOMBRE	NIA	NOTA

Introducción a la Ciencia de Redes (2018-2019)

EXÁMEN FINAL

ESCRIBE TUS RESPUESTAS <u>CLARAMENTE</u> EN LOS ESPACIOS EN BLANCO Escribe como si estuvieras tratando de comunicar algo por escrito a otra persona que va a evaluar lo que escribes. Si por alguna razón (por ejemplo, si después de haber escrito la solución te das cuenta de que hay algún error que te gustaría corregir), puedes adjuntar una hoja adicional a tu examen. En este caso, indica claramente que la solución se puede encontrar en la hoja adicional. Además, puedes usar otras hojas para realizar cálculos.

Problema 1 *1 punto*

Supon que queremos diseñar estrategias de vacunación para prevenir que una enfermedad contagie a un número grande de personas.

1. Indica cómo se debería escoger a quién vacunar si no se conoce completamente la red social, y queremos basar la estrategia en la "paradoja de la amistad" (*friendship paradox*) que vimos en clase.

2. Indica cómo se debería escoger a quién vacunar si conocemos complemente la red social y queremos basar la estrategia de vacunación en el modelo de Cascada Independiente (*Independent Cascade* model).

Problema 2 *1 punto*

Describe paso a paso en seudocódigo cómo crear un grafo Barabási-Albert de N nodos con m_0 nodos iniciales y m_0 enlaces de salida por nodo. Para que tu seudocódigo sea válido, si en algún momento hay un paso aleatorio, debes indicar cuál es la probabilidad de cada posible resultado de este evento.

Problema 3 *1 punto*

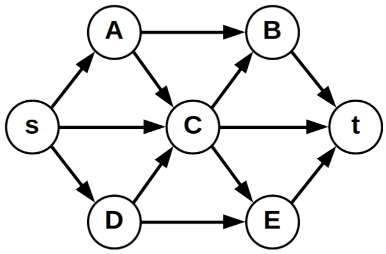
Bajo un modelo de adhesión preferencial (*preferential attachment*) con efectos de edad (*aging effects*), la probabilidad de que un nodo de grado k_i creado en el momento t_i adquiera un nuevo enlace en el paso t es $\Pi(k_i, t - t_i) \approx k_i(t - t_i)^{-v}$ donde v es un exponente que controla el proceso de envejecimiento.

1. ¿Cuál debería ser el valor de v para que esto fuese equivalente a *preferential attachment* normal?

2. Cuando $v \to \infty$ observamos que el grafo resultante es una línea, es decir, una secuencia de nodos en que cada nodo se conecta solamente con los nodos anterior y siguiente. ¿Por qué?

Problema 4 *1 punto*

Considera cortes (s, t) ((*s,t)-cuts*) en el grafo de la derecha, donde s es el nodo fuente y t el nodo terminal. Asume que cada arco tiene costo igual a 1.

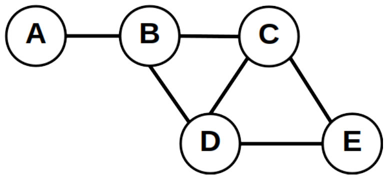


1. Por inspección visual, ¿cuál es el mínimo costo de un corte (s, t) en este grafo, y cuál es un ejemplo de un corte con este costo? (Puedes dibujarlo sobre el grafo de la derecha si quieres).

2. Ejecuta el algoritmo aleatorio para cortes (s, t) que vimos en clase, dibujando todos los grafos intermedios, e indicando el costo del corte resultante.

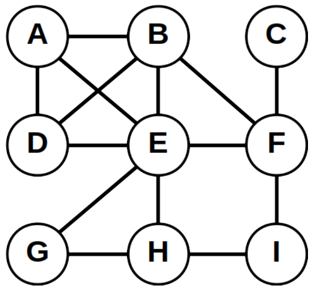
Problema 5 *2 puntos*

Ejecuta el algoritmo de Brandes-Newman para determinar el *edge betweenness* en el grafo que se muestra a la derecha. Indica los valores finales de *edge betweenness* claramente.



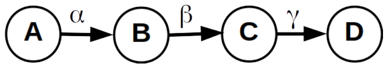
Problema 6 *1 punto*

Considera el grafo de la derecha. Ejecuta el algoritmo aleatorizado de Charikar para obtener un sub-grafo denso, indicando todos los grafos intermedios y sus densidades, marcando claramente el grafo con la densidad más alta. Para densidad usa $|E|/|V|$ donde $|E|$ es el número de arcos en el subgrafo y $|V|$ el número de nodos en el subgrafo.



Problema 7 *2 puntos*

Considera el grafo de la derecha, incluyendo las probabilidades de infección que aparecen en los arcos: α, β y γ. Sea X_i el número esperado de nodos infectados bajo el modelo de Cascada Independiente (*Independent Cascade*) para una infección que comienza en el nodo i, incluyendo el nodo infectado inicialmente.



Por ejemplo, si una infección comienza en el nodo B, la probabilidad de que el número de nodos infectados sea 2 es $P(X_B = 2) = \beta \cdot (1 - \gamma)$. Esto es porque para que el número de infectados sea 2 necesitamos que el intento de infección de B a C sea exitoso pero el intento de infección de C a D falle.

Recuerda que la esperanza de una variable X es $E[X] = \sum x \cdot P(X = x)$, donde la suma se hace sobre todos los posibles valores x que la variable puede tomar.

1. ¿Cuánto es $E[X_C]$ como función de γ?

2. ¿Cuánto es $E[X_A]$ como función de α, β, γ?

Problema 8 *1 punto*

Bajo el modelo SIS (Susceptible - Infectado - Susceptible), la proporción de nodos infectados $i(t)$ sigue

$$i(t) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta \langle k \rangle}\right) \frac{Ce^{(\beta\langle k \rangle - \mu)t}}{1 + Ce^{(\beta\langle k \rangle - \mu)t}} ,$$

donde μ es la tasa de recuperación (*recovery rate*), β la probabilidad de infección, $\langle k \rangle$ el grado promedio de los nodos, y C es una constante que depende de i_0, el número inicial de nodos infectados.

En el límite cuando $t \to \infty$:

1. Si $\mu < \beta \langle k \rangle$, ¿cuál es el límite de $i(t)$?

2. ¿Cómo se le llama a este estado?

3. ¿Qué sucede si $\mu > \beta \langle k \rangle$?

4. ¿Bajo qué condiciones en el modelo SIS el número de nodos infectados es mayor?