NOMBRE	NIA	NOTA

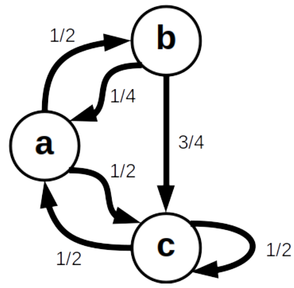
Introducción a la Ciencia de Redes (2018-2019)

EXAMEN PARCIAL 02

ESCRIBE TUS RESPUESTAS CLARAMENTE EN LOS ESPACIOS EN BLANCO Escribe como si estuvieras tratando de comunicar algo por escrito a otra persona que va a evaluar lo que escribes. Si por alguna razón (por ejemplo, si después de haber escrito la solución te das cuenta de que hay algún error que te gustaría corregir), puedes adjuntar una hoja adicional a tu examen. En este caso, indica claramente que la solución se puede encontrar en la hoja adicional. Además, puedes usar otras hojas para realizar cálculos.

Problema 1 *3 puntos*

Considera el grafo de la derecha, y una versión con pesos de Simplified PageRank; los pesos aparecen dibujados junto a los arcos en este grafo. Estos pesos, que como puedes ver están normalizados, indican la proporción en la cual los puntajes deben ser distribuidos a lo largo de los enlaces salientes. Denota por p_a, p_b, p_c los puntajes finales de los nodos a, b, y c respectivamente.



1. (2 puntos) Escribe un sistema de cuatro ecuaciones lineales y tres incógnitas (p_a, p_b, p_c), en el cual
   - las primeras tres ecuaciones son las ecuaciones de equilibrio para cada nodo, que indican que el puntaje de un nodo es la suma con pesos de sus puntajes entrantes (o dicho de otra forma, que si hacemos una iteración más obtendremos los mismos puntajes), y
   - la cuarta ecuación indica que p_a, p_b, p_c forman una distribución de probabilidad (suman 1).
2. (1 punto) Resuelve este sistema de ecuaciones para determinar p_a, p_b, p_c.

Problema 2 *3 puntos*

Considera una versión con pesos del algoritmo de Hubs y Authorities. Sea $G = (V, E, W)$ un grafo, $|V| = N$, $E \subseteq V \times V$, $W : E \to \mathbb{R}_0^+$. Usamos $f(i)$ para denotar el peso total que sale de un nodo, $f(i) = \sum_{(i,j)\in E} W(i,j)$ y $b(i)$ el peso total que entra a un nodo, $b(i) = \sum_{(j,i)\in E} W(j,i)$. Para todos los nodos $i \in V$, definimos lo siguiente:

$$h_0(i) = \widehat{h_0}(i) = \frac{1}{N}$$

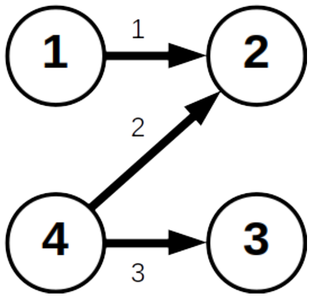
$$a_k(i) = \sum_{(j,i)\in E} h_k(j) \cdot \frac{W(j,i)}{f(j)} \qquad (k \geq 0) \qquad\qquad h_k(i) = \sum_{(i,j)\in E} a_{k-1}(j) \cdot \frac{W(i,j)}{b(j)} \qquad (k \geq 1)$$

$$\widehat{a_k}(i) = \frac{a_k(i)}{\sum_{j\in V} a_k(j)} \qquad\qquad \widehat{h_k}(i) = \frac{h_k(i)}{\sum_{j\in V} h_k(j)}$$

Definimos vectores columna $\vec{h}_k$, $\vec{\hat{h}}_k$, $\vec{a}_k$, $\vec{\hat{a}}_k$ como:

$$\vec{h}_k = \begin{bmatrix} h_k(1) \\ h_k(2) \\ \vdots \\ h_k(N) \end{bmatrix} \qquad \vec{\hat{h}}_k = \begin{bmatrix} \widehat{h_k}(1) \\ \widehat{h_k}(2) \\ \vdots \\ \widehat{h_k}(N) \end{bmatrix} \qquad \vec{a}_k = \begin{bmatrix} a_k(1) \\ a_k(2) \\ \vdots \\ a_k(N) \end{bmatrix} \qquad \vec{\hat{a}}_k = \begin{bmatrix} \widehat{a_k}(1) \\ \widehat{a_k}(2) \\ \vdots \\ \widehat{a_k}(N) \end{bmatrix}$$

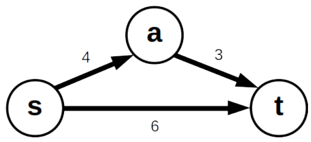
Con estas definiciones, podemos usar matrices cuadradas R, S, de tamaño $N \times N$ para escribir esto como una multiplicación de matrices, $\vec{a}_k = R\vec{\hat{h}}_k$, $\vec{h}_k = S\vec{\hat{a}}_{k-1}$. Para el grafo de la derecha, en el cual los números juntos a los arcos son los pesos W de cada arco, indica numéricamente:



1. (1 punto) La matriz R
2. (1 punto) El vector $\vec{a_0}$ computado multiplicando una matriz y un vector.
3. (1 punto) La matriz S

Problema 3 *1 punto*

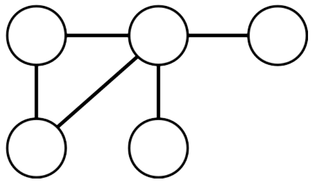
Enumera todos los posibles (s,t)-cortes en el grafo de la derecha, e indica el costo (valor) de cada corte. Escribe cada corte como un subconjunto de arcos del conjunto $\{(s,a),(s,t),(a,t)\}$.



Problema 4 *2 puntos*

Considera el grafo de la derecha.

1. (1 punto) Indica cuántos nodos hay en cada k-core de este grafo.
2. (1 punto) Dibuja un nuevo grafo que tenga los mismos nodos y sólo un arco adicional, en el cuál no haya nodos en el 1-core.



Problema 5 *1 punto*

Provee una breve definición en palabras del "betweenness" de un **nodo**. No es necesario que introduzcas notación para la definición, mientras tu definición sea breve y no sea ambigua.